

کج مثال ۲۹: در مورد همگرایی و واگرایی سری‌های $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\sqrt{n}}$ ، به ترتیب کدام مورد صحیح است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(صنایع - سیستم - سراسری ۹۵)

(۴) همگرا - واگرا

(۳) همگرا - همگرا

(۲) واگرا - واگرا

(۱) واگرا - همگرا

☒ پاسخ: گزینه «۳» فرض می‌کنیم $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n}$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\sqrt{n}}$. ابتدا تکلیف سری B را معلوم می‌کنیم:

با فرض $a_n = ne^{-\sqrt{n}}$ و $b_n = \frac{1}{n^2}$ داریم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0 < 1 \Rightarrow$ سری B با توجه به آزمون مقایسه حدی همگراست.

برای سری A بهترین روش استفاده از آزمون آبل است.

در این سؤال $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ که می‌دانیم مجموع جزئی جملات سری $\sum_{n=1}^k b_n$ کران‌دار است. پس سری $\sum a_n b_n$ یا همان $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n}$ همگراست.

آزمون رابه

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد و حد $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$ موجود باشد:

(۱) اگر $L > 1$ ، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(۲) اگر $L < 1$ ، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

(۳) اگر $L = 1$ ، آن‌گاه این آزمون توانایی تعیین رفتار سری را ندارد.

از «آزمون رابه» معمولاً وقتی استفاده می‌شود که در «آزمون نسبت» مقدار L مساوی یک شود (در واقع وقتی که آزمون نسبت به ما کمک نکند!)

کج مثال ۳۰: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n+2)}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \dots \times (2n+3)}$ را مشخص کنید.

☒ پاسخ: اگر جمله‌ی عمومی را a_n در نظر بگیریم، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n+2) \times [2(n+1)+2]}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \dots \times (2n+3) \times [2(n+1)+3]} \Rightarrow a_{n+1} = a_n \times \frac{2n+4}{2n+5}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+4}{2n+5} \Rightarrow 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{2n+4}{2n+5} = \frac{(2n+5) - (2n+4)}{2n+5} = \frac{1}{2n+5}$$

پس طبق آزمون رابه داریم:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1$$

بنابراین سری واگراست.

توضیح: اگر می‌خواستیم با استفاده از آزمون نسبت (دالامبر) وضعیت همگرایی یا واگرایی سری را بررسی کنیم، به مقدار $L = 1$ می‌رسیدیم که نتیجه‌ای از آن به دست نمی‌آید.

کج مثال ۳۱: در مورد سری $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \dots (2+\sqrt{n})}$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(۲) سری واگراست.

(۱) سری همگرایی مطلق دارد.

(۴) با هیچ‌کدام از آزمون‌ها، نمی‌توان درباره‌ی این سری نظر داد.

(۳) سری همگرایی مشروط دارد.

☒ پاسخ: گزینه «۱» به راحتی با استفاده از «آزمون رابه» داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2+\sqrt{n+1}} = \infty > 1$$

بنابراین سری همگراست.